J. 1161

ENSAI

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 2000

Option **A.** – **MATHÉMATIQUES**

première composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci)

Tournez la page S.V.P.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et GL(E) le groupe des endomorphismes bijectifs de E.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, une partie A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$.

Un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est dit unitaire si son coefficient dominant vaut 1.

On note Π_f le polynôme minimal de f et $P_f(X) = \det(X\,id - f)$ son polynôme caractéristique.

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in E$ tel que :

$$C_a^p = \{a,\ f(a),\ f^2(a),\ ...,\ f^{p-1}(a)\}$$

soit une partie génératrice de E de cardinal p, stable par f, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} C_a^p \text{ possède } p \text{ éléments deux à deux distincts, et} \\ f(C_a^p) \subset C_a^p . \end{cases}$$

Une telle partie C_a^p est nommée cycle de f et on dit alors que f est *cyclique d'ordre p*.

PARTIE I

1. Pour quel(s) entier(s) n un projecteur h peut-il être cyclique ? Comment s'écrit alors un cycle de h ?

2. On considère $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

   a. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f. Déterminer le rang de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

   b. Mêmes questions avec l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ de matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & ... & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique d'ordre p.

   a. Justifier que $p \geqslant n$.

   b. Montrer que f est de rang au moins $n - 1$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f. Soit m le plus grand entier tel que la famille :

$$\mathcal{F} = \{a,\ f(a), ..., f^{m-1}(a)\}$$

   soit libre.

   a. Prouver que $\forall\, k \geqslant m$, $f^k(a) \in \text{Vect}\langle\mathcal{F}\rangle$.

   b. En déduire que la famille :

$$\{a,\ f(a), ..., f^{n-1}(a)\}$$

   est une base de E.

   c. Montrer que $\Pi_f = P_f$.

5. Montrer que si f est bijectif, et si C_a^p est un cycle de f, on a $f^p(a) = a$.

6. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f.
Déterminer une condition nécessaire portant sur a et b pour que f soit cyclique d'ordre 2.

7. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrer que r est cyclique si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

PARTIE II

Dans cette partie on se propose de caractériser les endomorphismes cycliques inversibles.

1. Soit $f \in GL(E)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f.

   a. Montrer que $f^p = id$ et en déduire que f est diagonalisable.

   b. Montrer que le polynôme P_f (= Π_f d'après I.4.*c.*) divise $X^p - 1$ et que p est le plus petit entier k non nul tel que P_f divise $X^k - 1$.

2. Réciproquement on considère un endomorphisme bijectif $f \in GL(E)$ tel que P_f divise $X^p - 1$ et que p soit le plus petit entier k non nul tel que P_f divise $X^k - 1$.

   a. Montrer que $\Pi_f = P_f$. (On pourra utiliser la décomposition en facteurs irréductibles de Π_f et de P_f.)

   b. Montrer que f est diagonalisable.

   c. Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de vecteur propre de f et $x = \sum_1^n x_i v_i$ un vecteur de E tel que $\forall i, x_i \neq 0$. Montrer que la famille $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ est libre.

   d. Montrer que f est cyclique et que C_x^p est un cycle.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a. Trouver un polynôme annulateur de f de degré 2.

   b. Montrer que f est cyclique et déterminer un cycle de f.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

Dans cette partie on se propose de caractériser les endomorphismes cycliques non inversibles.

1. Soit f cyclique d'ordre p non inversible, et C_a^p un cycle de f.

   a. Vérifier que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.

   b. Montrer que $f^p(a) \neq a$.

   Soit $j \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $f^p(a) = f^j(a)$.

   c. Montrer que $f^p = f^j$.

   d. Montrer que $P_f (= \Pi_f$ d'après I.4.*c.*) est de la forme $X^j Q(X)$ où Q est un polynôme qui divise $X^{p-j} - 1$.

   Réciproquement, soit f un endomorphisme de E et j un entier non nul :

   $$\Pi_f = P_f = X^j Q(X)$$

   où Q est un polynôme qui divise $X^q - 1$ et aucun des polynômes $X^k - 1$ pour $0 < k < q$.

2. Montrer que si Q est un polynôme constant, f est cyclique.

On suppose désormais que degré $Q \geqslant 1$.

3. *a.* Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f^j \oplus \mathrm{Ker}\, (f^q - 1)$.

   b. Montrer que les sous-espaces $E_1 = \mathrm{Ker}\, f^j$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\, (f^q - 1)$ sont stables par f.

On note f_1 et f_2 les restrictions de f à E_1 et E_2.

4. *a.* Prouver que f_2 est cyclique d'ordre q. Soit $C_{a_2}^q$ un cycle de f_2.

   b. Prouver que $f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)$ engendre E_2.

5. *a.* Montrer que $P_f = P_{f_1} P_{f_2}$ et en déduire que $\dim E_1 = j$.

   b. Montrer que $f_1^{j-1} \neq 0$.

   c. En déduire qu'il existe $a_1 \in E_1$ tel que $a_1, f(a_1), \ldots, f^{j-1}(a_1)$ est une base de E_1.

6. Soit $a = a_1 + a_2$; montrer que C_a^{j+q-1} est un cycle de f.

7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & j \end{pmatrix}$$

où $j = \exp \dfrac{2i\pi}{3}$. Montrer que f est cyclique et en déterminer un cycle.

IMPRIMERIE NATIONALE